

mehr verflachte, je weiter rechts die Schwerpunktlage der abgeschnittenen Impulse angenommen wurde. Um die Übereinstimmung mit der Theorie zu erhalten, mußten sie alle Impulse, die (in zwei übereinander angeordneten Proportionalzählrohren) das Doppelte der wahrscheinlichsten Impulsgröße überschritten, von der Auswertung ausschließen. Wie jedoch Tab. 3 am Beispiel der 2. Meßreihe zeigt, wurden bei den vorliegenden Messungen analoge Beobachtungen nicht gemacht; der logarithmische Wiederanstieg der mittleren Impulsgröße erreichte vielmehr die von Bethe und Bloch angegebene Steilheit unter der Annahme, daß der Schwerpunkt der bei der Registrierung verlorengegangenen Impulse knapp oberhalb der Abschnidegrenze läge.

Mesonenreichweiten- gruppe	Theor. Wiederanstieg der mittleren Impulsgröße	Experimenteller Wiederanstieg		
		a)	b)	c)
II	12,1%	3,1%	7,0%	11%
III	21,9	11,6	20,5	29
IV	28,9	14,8	39,5	65

- a) unter Vernachlässigung der den Film übersteuernden Impulse;  
b) unter der Annahme, daß der Schwerpunkt der den Film übersteuernden Impulse bei der Abschnidegrenze liege;  
c) unter der Annahme, daß der Schwerpunkt der den Film übersteuernden Impulse beim Doppelten der Abschnidegrenze liege.

Tab. 3.

Die vorliegenden Ergebnisse zeigen also in Übereinstimmung mit zahlreichen neueren Arbeiten, daß

Ionisationsmessungen zuverlässig und reproduzierbar ausgeführt werden können. Man könnte daher daran denken, die Ionisation, die ja neben der Vielfachstreuung und der Bahnkrümmung im Magnetfeld eines der der Messung zugänglichen Charakteristika von Bahnspuren sehr energiereicher Teilchen darstellt, zur Messung von Teilchenenergien heranzuziehen. Einer solchen Anwendung der Meßmethode scheint zunächst die in der erheblichen Breite der Impulsgrößenverteilungen zum Ausdruck kommende Undefiniertheit des Zusammenhanges zwischen Impulsgröße und Teilchenenergie im Wege zu stehen, doch ließe sich dieser durch die Bedingung, daß das gleiche Teilchen in mehreren hintereinander angeordneten Zählrohren gleichgroße Impulse erzeugen soll, in ausreichendem Maße verschärfen. Es wird deshalb für möglich gehalten, daß eine solche Anordnung in gewissen Fällen ein magnetisches Energiespektrometer ersetzen kann.

Eine mir dankenswerterweise vom Max-Planck-Institut für Physik in Göttingen gewährte persönliche Beihilfe gab mir die Möglichkeit zur Durchführung der vorliegenden Arbeit. Ich danke Herrn Prof. Dr. O. H a x e l für die Problemstellung, für das ständige Interesse und für wertvolle Diskussionen. Herrn Prof. Dr. K. W i r t z bin ich für seine fördernde Leitung sowie für zahlreiche wertvolle Ratschläge ebenfalls zu besonderem Dank verpflichtet.

# Lösungen der hydrodynamischen Gleichungen mit linearem Verlauf der Geschwindigkeit

Von SEBASTIAN V. HOERNER  
Aus dem Max-Planck-Institut für Physik, Göttingen  
(Z. Naturforschg. 10 a, 687—692 [1955]; eingegangen am 20. Juli 1955)

Fragt man nach allen ebenen Gasströmungen, bei denen die Gasgeschwindigkeit zu allen Zeiten eine lineare Funktion des Ortes ist, so läßt sich die allgemeine Lösung des Problem es explizit angeben. — Es existieren drei verschiedene allgemeine Lösungstypen und drei Grenzfälle. Eine spezielle Untergruppe der Lösungen wird gesondert betrachtet.  
Ein Vergleich mit starken Stoßfronten zeigt, daß diese linearen Lösungen die Frontbedingungen im allgemeinen nicht erfüllen können, zur genäherten Darstellung des rückwärtigen Gebietes jedoch verwendbar sind. Nur bei einem Verhältnis der spezifischen Wärmen  $\kappa=7/5$  (5 Freiheitsgrade) ergeben sie eine exakte Darstellung.  
Ein weiteres Beispiel exakt linearen Geschwindigkeitsverlaufes ist das von B u r g e r s behandelte isentrope Abströmen ins Vakuum.

Eine Arbeit über instationäre starke Stoßfronten<sup>1</sup> zeigte, daß Frontverlauf und rückwärtiges Gebiet einer ebenen starken Front bei verschiedensten Anfangsbedingungen sich mit wachsender Zeit stets ein

<sup>1</sup> K. H a i n u. S. v. H o e r n e r, Z. Naturforschg. 9a, 993 [1954].

und derselben, von H ä f e l e<sup>2</sup> gefundenen Homologie-Lösung anschmiegen. Am auffälligsten war dabei der nahezu geradlinige Verlauf der Geschwindigkeit über dem Ort.

<sup>2</sup> W. H ä f e l e, Z. Naturforschg., in Vorbereitung.



Im Anschluß hieran tauchte die Frage auf, ob sich die hydrodynamischen Bewegungsgleichungen mit der zusätzlichen Forderung

$$u(x, t) = A(t) x + B(t)$$

allgemein lösen lassen. Weiterhin interessiert, wie weit diese linearen Lösungen zur genäherten Darstellung von Stoßfronten geeignet seien.

## I. Die allgemeine Lösung

1. Bezeichnen wir mit  $\varrho$ ,  $u$  und  $p$  Dichte, Geschwindigkeit und Druck, so wollen wir die Grundgleichungen der Hydrodynamik im ebenen Fall in der folgenden Form benutzen:

$$\varrho_t + u \varrho_x + \varrho u_x = 0, \quad (1a)$$

$$p_t + u p_x + \frac{5}{3} p u_x = 0, \quad (1b)$$

$$u_t + u u_x + p_x / \varrho = 0. \quad (1c)$$

Wegen der astrophysikalischen Anwendung auf atomimige Gase soll das Verhältnis der spezifischen Wärmen weiterhin stets mit  $\kappa = 5/3$  eingesetzt werden.

Durch Einführung der (durch die spezifische Wärme  $c_v$  dividierten) Entropie  $s$

$$e^s = p / \varrho^{5/3} \quad (2)$$

erhalten wir außerdem noch die Gleichung

$$s_t + u s_x = 0. \quad (3)$$

2. Wir wollen zur Abkürzung vereinbaren, daß große Druckbuchstaben stets Funktionen der Zeit allein darstellen. Unsere Forderung: „die Geschwindigkeit sei zu allen Zeiten eine lineare Funktion des Ortes“ lautet dann

$$u(x, t) = A x + B \quad (4)$$

und Gl. (3) schreibt sich somit

$$s_t + (A x + B) s_x = 0. \quad (5)$$

Die Form dieser Gleichung legt es nahe, für  $s$  einen Ansatz zu probieren, bei dem  $s$  eine willkürliche Funktion eines in  $x$  linearen Argumentes  $y$  ist, das wir in folgender Form schreiben wollen:

$$s = s(y) \quad \text{mit} \quad y = (x - Q)/S. \quad (6)$$

Bezeichnen wir mit einem Strich die Ableitung nach  $y$  und mit einem Punkt die nach der Zeit, so erhalten wir mit  $s_t = s' y_t$  (und entsprechend für  $s_x$ ) durch Einsetzen von (6) in (5):

$$A x + B = - \frac{y_t}{y_x} = \frac{\dot{S}}{S} x + \frac{S \dot{Q} - \dot{S} Q}{S}. \quad (7)$$

$$\text{Mit} \quad A = \dot{S}/S \quad \text{und} \quad B = (S \dot{Q} - \dot{S} Q)/S \quad (8)$$

ist demnach (6) die allgemeine Lösung von (5), da sie eine willkürliche Funktion des Argumentes  $y$  darstellt.

3. Auf ähnliche Weise können wir nun die allgemeinen Lösungen von (1a) und (1b) erhalten. Zusammengefaßt schreiben wir beide Gleichungen

$$f_t + u f_x + n f u_x = 0. \quad (9)$$

Dabei steht  $f$  für  $\varrho$  mit  $n = 1$  und für  $p$  mit  $n = 5/3$ . Mit der Substitution

$$h = \ln f + n \ln S \quad (10)$$

und  $u_x = \dot{S}/S$  erhalten wir aus (9)

$$h_t + u h_x = 0. \quad (11)$$

Die Gleichung für  $h$  hat also dieselbe Form wie die für  $s$ , ihre Lösung ist also auch wieder eine willkürliche Funktion von  $y$ . Das gleiche gilt dann auch für  $e^h$ , und als Lösungen von (1a) und (1b) erhalten wir somit

$$\varrho(x, t) = S^{-1} \cdot \varphi(y), \quad (12)$$

$$p(x, t) = S^{-5/3} \cdot \psi(y). \quad (13)$$

$\varphi$  und  $\psi$  sind wieder willkürliche Funktionen von  $y$ .

4. Als letztes bleibt noch Gl. (1c). Da wir für  $\varrho$  und  $p$  schon Lösungsformen besitzen, spielt (1c) die Rolle einer Verträglichkeitsbedingung; d. h. die Forderung ihrer Separierbarkeit nach Funktionen von  $y$  und  $t$  wird uns Bedingungen liefern für die bereits eingeführten Funktionen.

Wir setzen (4), (12) und (13) in (1c) ein und erhalten

$$-\psi'/\varphi = \underbrace{S^{5/3}(\dot{A} + A^2)}_{\alpha} y + \underbrace{S^{5/3}[(\dot{A} + A^2)Q + \dot{B} + AB]}_{\delta}. \quad (14)$$

Da  $\psi'/\varphi$  eine Funktion von  $y$  allein ist, darf auch die rechte Seite der Gleichung nicht mehr explizit von der Zeit abhängen. Die mit  $\alpha$  und  $\delta$  zusammengefaßten Ausdrücke müssen also Konstanten sein.

Eine Umrechnung nach (8) ergibt

$$\alpha = S^{5/3} \ddot{S} \quad \text{und} \quad \delta = S^{5/3} \ddot{Q}. \quad (15a, b)$$

Wir erhalten hieraus

$$\ddot{Q} = (\delta/\alpha) \ddot{S} \quad (16)$$

und mit  $u_0$  und  $t_0$  als Integrationskonstanten

$$Q = u_0(t - t_0) + (\delta/\alpha)S, \quad (17)$$

wodurch  $y$  die Form erhält

$$y = [x - u_0(t - t_0)]/S - (\delta/\alpha). \quad (18)$$

Nun ist aber  $y$  ein Argument willkürlicher Funktionen, so daß wir die additive Konstante  $\delta/\alpha$  ohne weiteres weglassen können. Wir setzen also  $\delta=0$ , haben damit allerdings über den Nullpunkt von  $y$  nach (14) verfügt, daß dort gerade die substantielle Beschleunigung null ist. Es ist somit jetzt

$$y = [x - u_0(t - t_0)]/S. \quad (19)$$

5. Wir fassen das Bisherige zusammen. Der lineare Geschwindigkeits-Ansatz (4) ergibt mit den Grundgl. (1) als allgemeine Lösung Gl. (12) für die Dichte, Gl. (13) für den Druck und Gl. (6) für die Entropie. Eine hieraus erhaltene Formel für die Schallgeschwindigkeit  $a$  fügen wir noch hinzu:

$$a(x, t) = S^{-1/3} b(y). \quad (20)$$

Die Zeitfunktion  $S$  ist gegeben durch ihre Diff.-Gl. (15a). Wir haben vier Funktionen ( $\varphi$ ,  $\psi$ ,  $s$ ,  $b$ ) des durch (19) bestimmten Argumentes  $y$  eingeführt; von ihnen ist *eine* willkürlich, die anderen sind dann gegeben. Wählen wir z. B. die Druckfunktion  $\psi$  als willkürliche, so ist (mit  $\delta=0$ ) nach (14)

$$\varphi = -\psi'/\alpha y, \quad (21)$$

und weiterhin ist dann

$$s = \ln \psi - \frac{5}{3} \ln \varphi \quad (22)$$

und

$$b = (5 \psi/3 \varphi)^{1/2}. \quad (23)$$

Der Ansatz (4) für die Geschwindigkeit lautet mit (8), (17) und  $\delta=0$  dann:

$$u(x, t) = u_0 + \frac{\dot{S}}{S} [x - u_0(t - t_0)] \quad (24)$$

oder mit (19):

$$u(x, t) = u_0 + \dot{S} y. \quad (25)$$

Gl. (14) bzw. (21) hätten wir auch in der Form

$$-p_x/\varrho = \alpha S^{-5/3} y \quad (26)$$

schreiben können. Sie besagt dann einfach: soll die Verteilung der Geschwindigkeit linear sein und linear bleiben, so muß auch die substantielle Beschleunigung linear sein. Weiterhin lesen wir aus (24) und (26) ab: das mit  $u_0$  fliegende Teilchen bleibt *stets* unbeschleunigt. Außerdem zeigt (6), daß die Linien  $y = \text{const}$  Lebenslinien (Teilchenbahnen) sind.

## II. Der zeitliche Verlauf

1. Der zeitliche Verlauf der Lösungen wird bestimmt durch die Diff.-Gl. für  $S$

$$\dot{S} = \alpha S^{-5/3}. \quad (27)$$

Einmal integriert, erhalten wir mit  $\beta$  als Integrationskonstanten

$$\dot{S}^2 = \beta - 3 \alpha S^{-2/3}. \quad (28)$$

Je nach den Vorzeichen von  $\alpha$  und  $\beta$  werden wir verschiedene Lösungstypen erhalten. Sind beide positiv, so führen wir die folgenden Normierungen ein:

$$R = (\beta/3 \alpha)^{3/2} \cdot S \quad \text{und} \quad (29)$$

$$T = \beta^2/(3 \alpha)^{3/2} \cdot (t - t_1)$$

mit  $t_1$  als weiterer Integrationskonstanten. Wir können dann (28) schreiben

$$R_T^2 = 1 - R^{-2/3} \quad (30)$$

und erhalten als Lösung

$$T = (R^{2/3} + 2) (R^{2/3} - 1)^{1/2}. \quad (31)$$

2. Sind  $\alpha$  oder  $\beta$  negativ, so setzen wir jeweils

$$\alpha_1 = -\alpha; \quad \beta_1 = -\beta \quad (32)$$

und führen die Normierungen (29) nun mit  $\alpha_1$  bzw.  $\beta_1$  so aus, daß stets nur die positiven Größen benutzt werden. Dann erhalten wir

$$T = (R^{2/3} - 2) (1 + R^{2/3})^{1/2} \quad \text{für } \alpha < 0 \text{ und } \beta > 0, \quad (33)$$

$$T = (R^{2/3} + 2) (1 - R^{2/3})^{1/2} \quad \text{für } \alpha < 0 \text{ und } \beta < 0. \quad (34)$$

Da  $R$  und  $T$  als physikalische Größen reell sein sollen, ist der Fall  $\alpha > 0$ ,  $\beta < 0$  auszuschließen.

3. Als letztes sind noch die Grenzfälle bei verschwindenden Konstanten zu betrachten. Mit entsprechenden Normierungen ergibt sich:

$$R = (\frac{4}{3} T)^{3/4} \quad \text{für } \alpha < 0, \quad \beta = 0, \quad (35)$$

$$R = T \quad \text{für } \alpha = 0, \quad \beta > 0, \quad (36)$$

$$R = \text{const} \quad \text{für } \alpha = 0, \quad \beta = 0. \quad (37)$$

Die restlichen Kombinationen sind wiederum auszuschließen.

4. In Abb. 1 ist das Ergebnis dargestellt und in Tab. 1 schematisch erläutert.

Kurve	Gl.	$\alpha$	$\beta$	Beschleunigung wirkt	$u_x$
1	31	+	+	expandierend unabhängig vom Ort	$\neq 0$
2	36	0	+		$= 0$
3	37	0	0		$\neq 0$ für $t \rightarrow \infty$
4	33	-	+	schwach komprimierend Grenzfall zw. 4 u. 6 stark komprimierend	$= 0$ für $t \rightarrow \infty$
5	35	-	0		
6	34	-	-		

Tab. 1

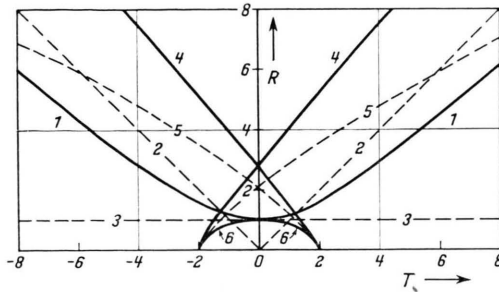


Abb. 1. Der Verlauf der Abstände  $R$  benachbarter Lebenslinien mit der Zeit  $T$  für alle Lösungstypen (Tab. 1).

Zur Veranschaulichung der Figur diene folgendes. Da  $y = \text{const}$  auf Lebenslinien gilt, so ändert sich nach (12) die Dichte längs einer Lebenslinie mit  $S^{-1}$ . Das heißt aber, daß der Abstand benachbarter Lebenslinien sich mit  $S$  ändert. Da sich  $R$  von  $S$  (und  $T$  von  $t$ ) nur durch die Normierung unterscheidet, so können wir sagen: Abb. 1 stellt den zeitlichen Verlauf des Abstandes benachbarter Lebenslinien dar.

Es existieren also drei allgemeine Lösungstypen und drei Grenzfälle. Die allgemeinen Lösungen sind:

Kurve 1: gebremstes Zusammenlaufen; Stillstand; beschleunigtes Auseinanderlaufen.

Kurve 4: beschleunigtes, zum Schluß unendlich schnelles Zusammenlaufen. Oder: anfangs unendlich schnelles, dann gebremstes Auseinanderlaufen.

Kurve 6: anfangs unendlich schnelles Auseinanderlaufen; Bremsung bis Stillstand; beschleunigtes, zum Schluß unendlich schnelles Zusammenlaufen.

Und die drei Grenzfälle sind:

Kurve 2: konstantes Auseinander- oder Zusammenlaufen.

Kurve 3: konstanter Abstand.

Kurve 5: wie 4, aber mit Stillstand nach (vor) unendlich langer Zeit.

Weiterhin ist noch zu bemerken, daß es keine oszillierenden Lösungen gibt. Mit anderen Worten: die Beschleunigung wirkt entweder stets expandierend oder stets komprimierend, ein Wechsel ist nicht möglich.

### III. Festlegung der Konstanten

1. Es sei zu einer festen Zeit eine räumliche Verteilung von  $u$ ,  $q$  und  $p$  vorgegeben. Dabei seien  $u$

und  $p_x/q$  linear in  $x$ , so daß wir es mit einer der hier behandelten Lösungen zu tun haben. Es sollen nun alle Konstanten soweit bestimmt werden, daß sich der weitere zeitliche Verlauf aus der Abb. 1 ergibt.

2. Zunächst muß der Lösungstyp festgelegt werden. Mit (26) und (19) und der Abkürzung

$$g = (p_x/q)_x \quad (38)$$

ist

$$\alpha = -S^{1/2} g \quad (39)$$

oder

$$\text{sgn } \alpha = -\text{sgn } g. \quad (40)$$

Aus (28), (24), (39) und der Abkürzung

$$h = u_x \quad (41)$$

erhalten wir weiterhin

$$\beta = S^2 (h^2 - 3g) \quad (42)$$

oder

$$\text{sgn } \beta = \text{sgn } (h^2 - 3g). \quad (43)$$

Die Gln. (40) und (43) ergeben uns die Vorzeichen von  $\alpha$  und  $\beta$  und somit den Lösungstyp.

3. Als nächstes bestimmen wir den augenblicklichen Punkt  $R_a$  auf der entsprechenden Kurve  $R(T)$ . Nach (29) und der Festlegung über die jeweilige Normierung ist

$$R = (|\beta|/3|\alpha|)^{1/2} S. \quad (44)$$

Setzen wir (39) und (42) ein, so erhalten wir

$$R_a = |(h^2/3g) - 1|^{1/2}. \quad (45)$$

4. Nun ist noch der Maßstab der Zeitskala zu berechnen. Schreiben wir die Normierung (29) in der Form

$$T = (t - t_1)/\tau \quad \text{mit} \quad \tau = (3|\alpha|)^{1/2}/\beta^2, \quad (46)$$

so erhalten wir für die Zeitskala  $\tau$  mit (39) und (42)

$$\tau = (3|g|)^{-1/2} \cdot (h^2/3g - 1)^{-2}. \quad (47)$$

5. Der Maßstab von  $S$  ist willkürlich zu wählen, da direkt nur  $\dot{S}/S$  gebraucht wird. Sonst ist  $S$  nur Faktor bei willkürlichen Funktionen.

### IV. Die Untergruppe $p \sim q^2$

1. Außer dem etwa geradlinigen Verlauf der Geschwindigkeit hatte sich in der Arbeit<sup>1</sup> über instationäre starke Stoßfronten auch noch ergeben, daß die

Beziehung  $p \sim \varrho^\gamma$  für die räumliche Verteilung zu festen Zeiten recht gut erfüllt war. Dabei war der Proportionalitätsfaktor zeitabhängig, der Exponent  $\gamma$  dagegen konstant und rund 0,8. Mit  $P$  als einer reinen Zeitfunktion wollen wir dies schreiben:

$$p(x, t) = P \varrho^\gamma. \quad (48)$$

Wir wollen auch hier wieder die Frage stellen: Welche Lösungen ergeben die Grundgl. (1) mit der zusätzlichen Forderung (48)? Die Linearität von  $u$  setzen wir hierbei also *nicht* voraus, es zeigt sich aber, daß wir sie durch (48) erhalten.

2. Durch Differenzieren erhalten wir aus (48)

$$\begin{aligned} p_x &= \gamma P \varrho^{\gamma-1} \varrho_x, \\ p_t &= \dot{P} \varrho^\gamma + \gamma P \varrho^{\gamma-1} \varrho_t. \end{aligned} \quad (49)$$

Wir setzen dies in die Grundgl. (1b) ein. Unter Benutzung der Kontinuitätsgl. (1a) ergibt sich dann

$$\dot{P} + \left(\frac{5}{3} - \gamma\right) P u_x = 0$$

oder

$$u_x = -\left(\frac{5}{3} - \gamma\right)^{-1} \cdot \dot{P}/P, \quad (50)$$

wobei wir  $\gamma \neq 5/3$ , d. h. *Anisentropie* voraussetzen.

Die Forderung (48) ergibt also zusammen mit den Grundgleichungen, daß  $u_x$  eine reine Zeitfunktion sein muß. Das aber heißt, daß  $u$  linear in  $x$  ist. (48) stellt also eine Untergruppe von (4) dar, und alle bisher abgeleiteten Beziehungen müssen auch jetzt gelten.

3. Zum Beispiel hatten wir bisher  $u_x = \dot{S}/S$  geschrieben. Zusammen mit (50) gibt dies den Übergang von  $S$  auf  $P$ :

$$P = \delta_0 S^{-(5/3-\gamma)} \quad (51)$$

mit einer willkürlichen Konstanten  $\delta_0$ .

4. Wenn  $u$  linear in  $x$  ist, so muß sich weiterhin erstens  $p_x/\varrho$  in der Form (26) schreiben lassen, und zweitens müssen  $p$  und  $\varrho$  die Gestalt (12) bzw. (13) haben. Nach einiger Zwischenrechnung ergibt dies (mit  $\zeta = \text{const}$ ):

$$\varrho = S^{-1} \left( \frac{2(1-\gamma)}{2\delta_0\gamma} y^2 + \zeta \right)^{-1/(1-\gamma)}. \quad (52)$$

Die Dichte ist also nun keine willkürliche Funktion mehr, sondern eine Potenz eines in  $x$  quadratischen Ausdrucks.

## V. Vergleich mit der Standardfront

1. Die sich stets einspielende Verteilung<sup>1</sup> wollen wir eine Standardfront nennen. Sie entsteht aus fast beliebigen Anfangsverteilungen, wenn eine schnelle Wolke ohne Energienachschub in ein ruhendes Gebiet konstanter Dichte hineinläuft. — Wir stellen die Frage, wieweit sich die linearen Lösungen zur Darstellung einer Standardfront eignen.

2. Zunächst wollen wir danach fragen, ob man mit den linearen Lösungen die Frontbedingungen erfüllen kann, die wir nach v. Weizsäcker<sup>3</sup> in der Form schreiben:

$$\varrho = \text{const}, \quad p = \frac{1}{3} \varrho u^2. \quad (53), (54)$$

Der jeweilige Ort der Front ist durch Integration einer weiteren Gleichung

$$\dot{x}_f = v = \frac{4}{3} u \quad (55)$$

gegeben, wobei  $v$  die Geschwindigkeit und  $x_f$  der Ort der Front ist.

Wir gehen dabei so vor, daß wir uns im  $x, t$ -Diagramm das Feld einer noch näher zu bestimmenden linearen Lösung gegeben denken. In diesem Feld denken wir uns eine Linie herausgegriffen, die der Gl. (55) genügt, die also bezüglich ihrer Geschwindigkeit eine Front darstellen könnte. Die Schreibweise (12) für die Dichte enthält eine willkürliche Funktion  $\varphi(y)$  des in  $x$  linearen Argumentes  $y$ , die wir nun so festlegen, daß längs der herausgegriffenen Kurve die Dichte gerade konstant bleibt. Damit ist auch (53) erfüllt. Da nun aber wegen der Linearität der Beschleunigung (26) auch der Verlauf des Druckes festgelegt ist, so bleibt keine weitere Freiheit mehr zur Erfüllung der Bedingung (54). Das aber heißt, daß die linearen Lösungen im allgemeinen die Frontbedingungen nicht erfüllen können.

3. Häfele<sup>2</sup> hat inzwischen gezeigt, daß bei einem Verhältnis der spezifischen Wärmen  $\kappa = 7/5$  (5 Freiheitsgrade) sich die Standardfront analytisch angeben läßt und hierbei einen exakt linearen Verlauf der Geschwindigkeit besitzt. In einer folgenden Arbeit wird F. Meyer zeigen, daß sich die Frontbedingungen mit linearen Lösungen nur für diesen speziellen Wert von  $\kappa$  erfüllen lassen. H. Schmidt untersucht zur Zeit die Frage, wie groß die Abweichungen einer Standardfront gegenüber einer linearen Lösung sind in Abhängigkeit von  $\kappa$ .

<sup>3</sup> C. F. v. Weizsäcker, Z. Naturforschg. 9a, 269 [1954].



4. An Hand der älteren Rechnungen mit  $\kappa = 5/3$  lassen sich einige Vergleiche durchführen. Zum Beispiel gilt (25) für lineare Lösungen. Längs einer Lebenslinie  $y = \text{const}$  ist dann mit (27)

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{y=\text{const}} = \ddot{S} y = -\alpha S^{-5/3} y \quad (56)$$

und mit Gl. (20) für die Schallgeschwindigkeit  $a$  ergibt sich

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t} / a^5\right)_{s=\text{const}} = \text{const}, \quad (57)$$

denn nach (6) ist für  $y = \text{const}$  auch die Entropie  $s$  konstant.

Für eine der früher gerechneten instationären Stoßfronten (l. c.<sup>1</sup>, Abb. 8) ergab sich, daß sich der Ausdruck (57) längs einer Lebenslinie um nur 20% änderte, während gleichzeitig  $u$  und  $\partial u / \partial t$  sich um einen Faktor 4,4 bzw. 3,1 veränderten; d. h. (57) weicht nur relativ wenig von der Konstanz ab.

5. Eine weitere Probe soll durchgeführt werden für die räumliche Verteilung zu einer festen Zeit. Wir benutzen die von Häfele<sup>2</sup> aus dem Homologie-Ansatz erhaltene Standardlösung und prüfen die Konstanz der Größen  $u_x$ ,  $(p_x/\rho)_x$  und  $\gamma$ . Als anschauliche Skala benutzen wir die Geschwindigkeit  $u$ , die an der Front auf 1 normiert ist, nach hinten abfällt und negativ wird. Die in Prozent ausgedrückten Abweichungen der Größen gegenüber ihrem Wert an der Front zeigt Tab. 2.

$u$	$u_x$	$(p_x/\rho)_x$	$\gamma$
0	+20%	-60%	+1,30%
-1	+40%	-240%	+2,30%
-3	+70%	-470%	+4,00%
-10	+110%	-830%	+6,20%

Tab. 2.

Wir sehen, daß die Linearität von  $u$  über den gesamten Bereich recht gut ist, die Beschleunigung dagegen nur im physikalisch interessanten Bereich etwa linear ist. Sehr gut jedoch ist  $p \sim \rho^\gamma$  erfüllt.

Direkt an der Front muß wegen der Randbedingungen (53) bis (55) stets gelten

$$\gamma = (2\kappa - 1)/3. \quad (58)$$

## VI. Diskussion

1. Wir haben gesehen, daß die aus der Forderung linearer Geschwindigkeit sich ergebenden Lösungen

sich allgemein angeben lassen. Sie bilden je nach Wahl der Integrationskonstanten drei allgemeine Lösungstypen und drei Grenzfälle.

Diese linearen Lösungen können eine Standardfront exakt darstellen bei  $\kappa = 7/5$  (5 Freiheitsgrade). Für  $\kappa = 5/3$  (3 Freiheitsgrade) ergeben sie eine gute Näherungsdarstellung bis etwa zum Nulldurchgang der Geschwindigkeit und sind unter Umständen noch brauchbar bis zur doppelten Entfernung von der Front. Den physikalisch interessanten Teil der Standardfront kann man also mit ihnen genähert beschreiben. — Innerhalb der linearen Lösungen scheint die Untergruppe  $p \sim \rho^\gamma$  besonders zur Darstellung geeignet zu sein.

2. Ein weiteres Anwendungsbeispiel ist das von Burgers<sup>4</sup> behandelte Abströmen: Gegeben sei zur Zeit  $t=0$  eine Wolke, die den Halbraum  $x < 0$  ruhend und mit konstanter Dichte und Entropie erfülle. In  $x > 0$  sei Vakuum. Dann läuft mit der Geschwindigkeit  $-a_0$  eine Verdünnungswelle nach links in die Wolke hinein, während die äußerste Grenze des Gases mit  $+3a_0$  nach rechts läuft. ( $a_0$  = Schallgeschwindigkeit der ungestörten Wolke.) Zwischen diesen beiden Grenzen ergibt sich ein linearer Verlauf der Geschwindigkeit:

$$u(x, t) = \frac{3}{4}(a_0 + x/t) \text{ für } \kappa = 5/3 \quad (59)$$

und für die Dichte gilt

$$\rho(x, t) = \rho_0 \left\{ \frac{3}{4}(1 - x/3a_0 t) \right\}^3. \quad (60)$$

3. Nach dem bisherigen scheint es so, als hätten allgemein Abströmvorgänge ins Vakuum die Tendenz zum linearen Abströmen, unter Umständen leicht gestört durch damit nicht verträgliche Randbedingungen. Diese Frage könnte untersucht werden einerseits durch numerische Rechnung instationären Abströmens verschiedener Anfangsverteilungen, ähnlich wie früher<sup>1</sup>. Andererseits könnte man versuchen, die Stabilität linearer Lösungen gegenüber Störungen analytisch zu untersuchen. So hat z. B. Häfele<sup>2</sup> den Ansatz (4) durch ein kleines in  $x$  quadratisches Glied erweitert und gezeigt, daß dieses für  $t \rightarrow \infty$  verschwindet, wobei dann gerade eine Verteilung  $p \sim \rho^\gamma$  resultiert.

Herrn Prof. C. F. v. Weizsäcker und unserer Arbeitsgruppe möchte ich für viele wertvolle Diskussionen danken.

<sup>4</sup> J. M. Burgers, K. Ned. Akad. Wetensch. **49**, 588 [1946]; weitere Literatur bei D. C. Pack, Mon. Not. Roy. Astr. Soc. **113**, 43 [1953].